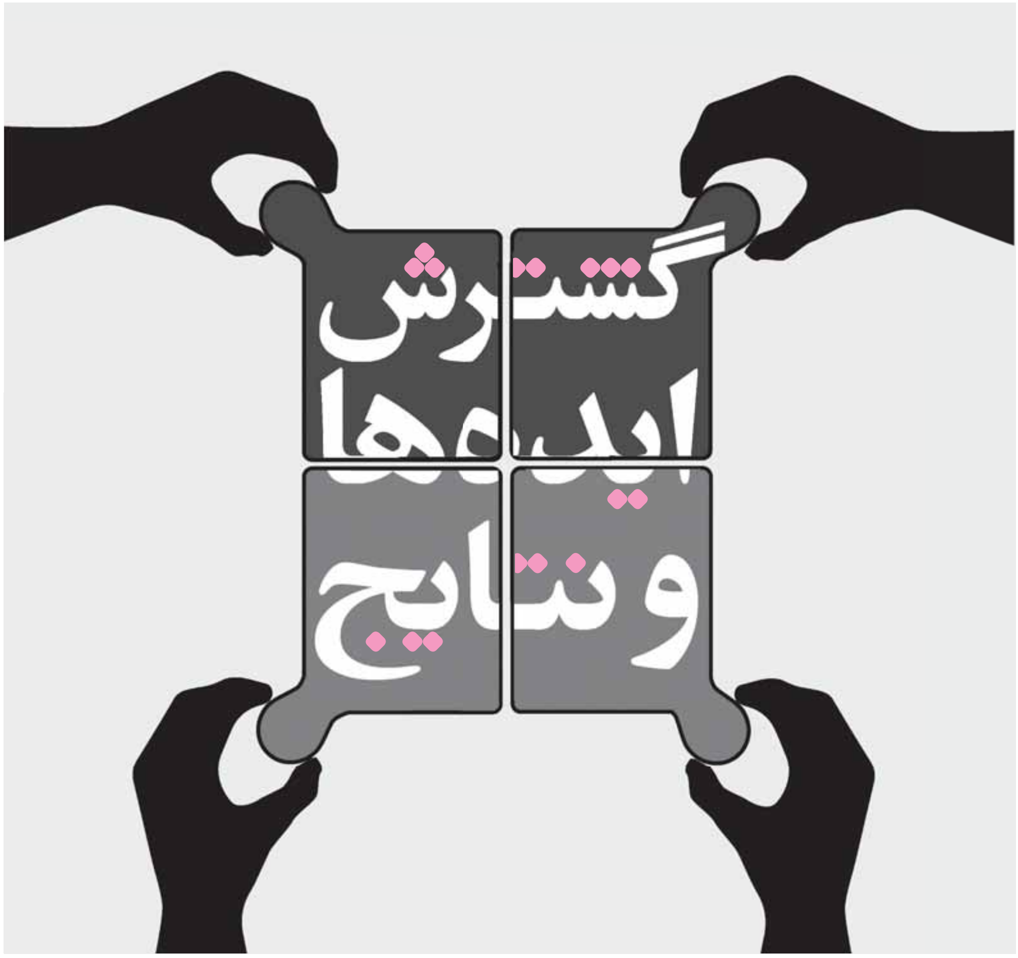
قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی ـ سمنان

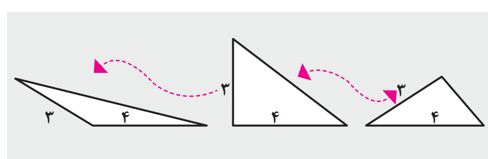


مقدمه

فرمول‌های ریاضی چگونه به‌وجود می‌آیند؟ آیا فرمول‌ها و روابط ریاضی از ابتدا به شکل کامل به‌دست آمده‌اند یا اینکه سیر تکاملی داشته‌اند؟ دانستن این سیر تکاملی چه فایده‌ای دارد؟ آیا همیشه می‌توان فرمول‌ها را گسترش داد؟ بی‌شک دانستن این سیر تکاملی کمک بسیار زیادی به فراگیری ریاضی می‌کند که به چند مورد آن می‌پردازیم.

قضیهٔ فیثاغورس و قضیهٔ کسینوس‌ها

بی‌شک قضیهٔ فیثاغورس یکی از معروف‌ترین قضایای هندسه است و بیان می‌کند که اگر در یک مثلث زاویه‌ای ۹۰ درجه باشد، مربع ضلع رو به زاویهٔ ۹۰ درجه یا همان قائمه، برابر با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر این زاویه است (شکل ۱).



شکل ۱

پرواضح است که اگر دو ضلع زاویهٔ قائمه ثابت بماند و زاویه کوچک‌تر شود، ضلع سوم کوچک‌تر می‌شود و اگر زاویه از ۹۰ درجه بیشتر شود، ضلع سوم هم بزرگ‌تر می‌شود. سؤالی که پیش می‌آید این است که اگر زاویه ۹۰ درجه نباشد، ضلع سوم چگونه محاسبه می‌شود و مقدار افزایش یا کاهش آن از حالت ۹۰ درجه چگونه حساب می‌شود؟

با یک اثبات هندسی ثابت می‌شود که تکامل این قضیه و رابطهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$c^2 = a^2 + b^2 \longrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C})$$

به‌خاطر سپردن قضیهٔ کسینوس‌ها با توجه به سیر

تکاملی آن بسیار ساده‌تر و مفهومی‌تر است. وقتی که زاویه تند باشد، کسینوس آن مثبت و در نتیجه مقدار c از حالت قائمه کمتر می‌شود. وقتی هم زاویه باز باشد، cos(C) منفی و در نتیجه مقدار c از حالت ۹۰ درجه بیشتر می‌شود.

برای مثال، اگر داشته باشیم: b=۸ و a=۶، ضلع سوم را در سه مثلث با این دو ضلع ثابت ولی زاویه‌های متفاوت حساب می‌کنیم.

$$\hat{C}=۶۰^\circ \Rightarrow c^۲=۶^۲+۸^۲-۲\times۶\times۸\times\cos(۶۰^\circ)$$
$$=۱۰۰-۴۸\Rightarrow c=\sqrt{۵۲}$$
$$\hat{C}=۹۰^\circ \Rightarrow c^۲=۶^۲+۸^۲-۲\times۶\times۸\times\cos(۹۰^\circ)$$
$$=۱۰۰-۰\Rightarrow c=\sqrt{۱۰۰-۰}=۱۰$$
$$\hat{C}=۱۲۰^\circ \Rightarrow c^۲=۶^۲+۸^۲-۲\times۶\times۸\times\cos(۱۲۰^\circ)$$
$$=۱۰۰+۴۸\Rightarrow c=\sqrt{۱۰۰+۴۸}=\sqrt{۱۴۸}$$

آیا رابطهٔ مساحت در قضیهٔ فیثاغورس به حجم گسترش می‌یابد؟

معمولاً این سؤال برای بسیاری از افراد پیش می‌آید که آیا در قضیهٔ فیثاغورس رابطهٔ $c^۳=a^۳+b^۳$ هم برقرار است؟ یعنی می‌توان گفت که اگر با اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای سه مکعب بسازیم، حجم مکعب ساخته شده با وتر، برابر است با مجموع حجم دو مکعب دیگر. در شکل کلی‌تر، آیا رابطهٔ فیثاغورس به شکل $c^n=a^n+b^n$ در یک مثلث قائم‌الزاویه برقرار است؟

با توجه به اینکه: $۵^۲=۴^۲+۳^۲$ و اینکه: $۵^۳\neq۴^۳+۳^۳$، به این نتیجه می‌رسیم که این گسترش قضیهٔ فیثاغورس درست نیست، چون ۳، ۴ و ۵ اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

آخرین قضیهٔ فرما تعمیم دیگری از قضیهٔ فیثاغورس

اعداد طبیعی {۳,۴,۵} و {۵,۱۲,۱۳} اعداد فیثاغورسی نامیده می‌شوند. چون در رابطهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند: $۱۳^۲=۵^۲+۱۲^۲$ و $۵^۲=۴^۲+۳^۲$. این یعنی معادلهٔ $x^۲+y^۲=z^۲$ در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، جواب دارد. سؤالی که ذهن بسیاری از ریاضی‌دانان را به خود مشغول کرد، این بود که اگر در معادلهٔ $x^۲+y^۲=z^۲$ به‌جای عدد ۲، اعداد ۳، ۴ و... قرار بگیرند، آیا باز هم معادله در مجموعهٔ اعداد طبیعی جواب دارد؟

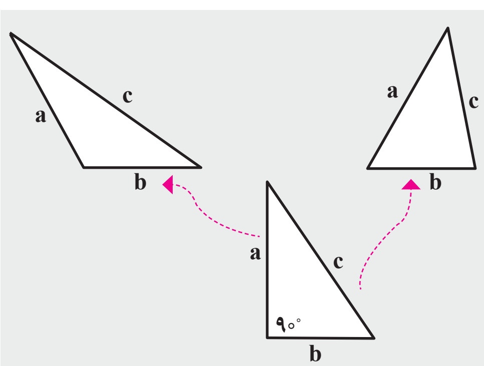
این سؤال آخرین قضیهٔ فرماست. قضیهٔ آخر فرما یکی از مشهورترین قضیه‌های تاریخ ریاضیات است. این قضیه می‌گوید: «معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$ برای $n\geq۳$ جواب صحیح و غیرصفر ندارد.»

یعنی اعداد صحیح و غیرصفر x، y و z را نمی‌توان یافت که جواب‌های معادلهٔ فوق باشند.

پی‌یر فرما، ریاضی‌دان فرانسوی سدهٔ ۱۷ میلادی، در حاشیهٔ کتابی نوشته بود که اثبات این قضیه را در ذهن دارد، ولی جای کافی برای نوشتن در اختیار ندارد. این قضیه تا سال ۱۹۹۴ حل نشده باقی مانده بود. تا اینکه **آندره وایلز**، استاد دانشگاه پرینستون، در سال ۱۹۹۳ با استفاده از نظریهٔ اعداد پیشرفته، اثباتی برای این قضیه ارائه کرد که دارای مشکلی بود. در سپتامبر ۱۹۹۴ اشکال این راه‌حل توسط خود وایلز و با همکاری یکی از همکارانش به‌نام **تیلر** برطرف شد. پس با توجه به قضیهٔ فرما به این نتیجه می‌رسیم که قضیهٔ فیثاغورس، قضیهٔ ویژه‌ای است و از نظر فضا گسترش نمی‌یابد [۱].

قضیهٔ سینوس‌ها، تعمیم فرمول مساحت

همان‌طور که می‌دانیم مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع زاویهٔ قائمه. حال این سؤال پیش می‌آید که اگر زاویهٔ ۹۰ درجه نباشد، فرمول مساحت چگونه تغییر می‌کند؟



شکل ۲

اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای دو ضلع زاویهٔ قائم a و b باشد، مساحت آن عبارت است از: $S=\frac{۱}{۲}ab$. اگر زاویه از ۹۰ درجه بیشتر یا کمتر شود، بدون اینکه

a و b تغییر کند، مقدار مساحت هم تغییر می‌کند. قضیهٔ سینوس‌ها بیان می‌کند که این تغییر به‌صورت $S=\frac{۱}{۲}ab\sin(C)$ است که گسترش همان فرمول قبل محسوب می‌شود.

$$S=\frac{۱}{۲}ab \longrightarrow S=\frac{۱}{۲}ab\sin(C)$$

برای مثال، اگر داشته باشیم: a=۴ و b=۵، با این دو ضلع، مساحت مثلث‌های مختلفی را به شکل زیر حساب می‌کنیم:

$$\hat{C}=۳۰^\circ \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}۴\times۵\times\sin(۳۰^\circ)=۵$$

$$\hat{C}=۹۰^\circ \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}۴\times۵\times\sin(۹۰^\circ)=۱۰$$

$$\hat{C}=۱۵۰^\circ \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}۴\times۵\times\sin(۱۵۰^\circ)=۵$$

گسترش معادلهٔ خط به معادلهٔ صفحه

همان‌طور که می‌دانیم، معادلهٔ کلی خط راست در صفحه به شکل ax+by+c=۰ است. گسترش یافتهٔ خط از صفحه به فضا، صفحه‌ای است که معادلهٔ آن چنین می‌شود: ax+by+cz+d=۰ که در آن، c ،b ،a و d اعداد ثابت هستند. جالب این است که معادلهٔ برخی صفحه‌ها به شکل معادلهٔ خط است. مثلاً معادلهٔ صفحه‌ای که موازی محور طول‌هاست، به شکل by+cz+d=۰ است. مثلاً معادلهٔ صفحه‌ای که از نقطهٔ (۱،۲،۳) عبور کند و بر بردار V=j+۲k عمود باشد، به این صورت است: y+۲z-۸=۰.

گسترش معادلهٔ دایره به بیضی و کره

دایره مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها از یک نقطهٔ ثابت مقدار ثابتی باشد. با توجه به این تعریف، معادلهٔ دایره‌ای که مرکز آن نقطهٔ (α,β) و شعاع آن R باشد، به‌صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ است. اگر در تعریف دایره مجموعهٔ نقاطی از فضا را جایگزین مجموعه نقاطی از صفحه کنیم، کره به‌دست می‌آید. اگر مرکز کره نقطهٔ (α,β,γ) و شعاع آن R باشد، معادلهٔ آن چنین می‌شود: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲+(z-\gamma)^۲=R^۲$.

مثلاً معادلهٔ دایره‌ای که مرکز آن (۲،۱) و شعاع آن ۵ باشد، به این صورت: $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۲۵$ و معادلهٔ کره‌ای که مرکز آن (۲،۱،-۱) و شعاع آن ۵ باشد، به این صورت $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲+(z+۱)^۲=۲۵$ است.

آیا روش دلتا هم گسترش می‌یابد؟

روش دلتا یا همان روش کلی حل معادلهٔ درجه دوم روشی بسیار ساده و کاربردی است که دانش‌آموزان در دبیرستان آن را می‌آموزند. برخی از دانش‌آموزان بعد از یاد گرفتن روش دلتا می‌پرسند: «آیا برای معادله‌های با درجه بالاتر هم همین روش وجود دارد؟» به‌عبارت دیگر، آیا روش دلتا گسترش پیدا می‌کند؟ **گالوا**، ریاضی‌دان فرانسوی، در قرن ۱۹ ثابت کرد که متأسفانه برای معادله‌های درجهٔ پنج به بالا چنین چیزی امکان ندارد [۱] و آب پاکی را روی دست ریاضی‌دانان ریخت.

بنابراین بسیاری از روابط و فرمول‌های ریاضی با گسترش ایده‌ها به‌وجود آمده‌اند و این روش بسیار کارآمد و مفید است. از طرف دیگر، در برخی موارد راه‌ها بسته است و نمی‌توان روابط را گسترش داد.

پی‌نوشت‌ها

۱. ویکی‌پدیا، دانش‌نامهٔ آزاد.